Gammes

But : Construction des gammes naturelles – Gamme de Pythagore – Cycle des quintes

Un mélomane est capable de percevoir à l'oreille si une musique est harmonieuse ou non. Il n'est pas nécessaire d'être mathématicien pour apprécier la musique. Pourtant… « la musique est un exercice d'arithmétique secrète et celui qui s'y livre ignore qu'il manie les nombres » (G. W. Leibniz, 1712).

Comment a-ton construit les gammes de musique et que représente la gamme dite « tempérée » utilisée aujourd'hui en musique occidentale ?

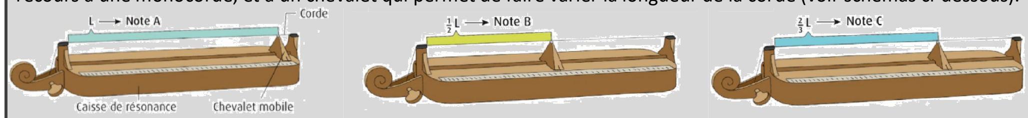
Pour le savoir, il faut revenir à l'origine de la création d'un son par vibration d'une corde ou de l'air dans un tuyau sonore. Au début, avec une corde, il ya une seule note, d'une seule hauteur … Quoi que ? La vibration d'une corde contient plusieurs modes harmoniques et le son qui en est émis paraît harmonieux avec une fréquence double, triple … de celle du fondamental. C'est la genèse des gammes octaves, quintes, … mais gare au loup !

1. La gamme issue des quintes

Document 1 : Octaves vs Quintes

Pour Pythagore (570-495 av J.-C.) et ses disciples, la beauté de la musique est associée à la sagesse des mathématiques. Ils considèrent donc que ce qui constitue la base de l'harmonie, ce n'est pas l'objet physique (l'instrument) qui produit le son, mais les nombres qui lient les sons produits les uns aux autres.

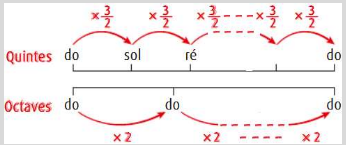
Grâce à ces nombres, ils vont construire une "échelle musicale", ou gamme, constituée d'un nombre limité de sons classés du plus grave au plus aigu. Pour définir les nombres (et donc les sons) qu'ils vont utiliser, les Pythagoriciens ont recours à une monocorde, et à un chevalet qui permet de faire varier la longueur de la corde (voir schémas ci-dessous).



À tension égale, plus la longueur de la corde est petite, plus le son obtenu est aigu. Ils remarquent que les notes A et B, dont le rapport des longueurs est ½ sont consonantes et correspondent à une même note à deux hauteurs différentes : l'intervalle qui les sépare forme une **octave**. Les notes A et C, pour un rapport des longueurs est 2/3, sont également consonantes : elles forment une **quinte**.

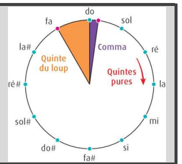
Les Pythagoriciens utilisent alors la quinte et l'octave pour créer d'autres notes. Pour **monter d'une quinte**, il suffit de **multiplier la fréquence du fondamental par 3/2**. Pour **monter d'une octave**, il faut la **multiplier par 2**.

Au bout de 12 quintes et 7 octaves, ils retombent **presque** sur la même note : le cycle semble se refermer.



Document 2 : La quinte du loup

On remarque que le rapport de la dernière note du cycle des quintes vaut 2,03 et ne retombe donc pas pile sur 2 (intervalle correspondant à une octave pure). Dans la dernière étape de la construction d'une gamme naturelle, pour retomber sur 2, il faut donc raccourcir la dernière quinte d'un comma, qui correspond à la différence entre les deux intervalles. Cette quinte est appelée quinte du loup car, elle "hurle". Les musiciens évitaient donc de l'utiliser.



1.1. Construction du cycle des quintes.

1.1.1. Sur quels intervalles les pythagoriciens s'appuient-ils pour créer de nouvelles notes ?

1.1.2. En exploitant le document 1, montrer par un calcul, que l'intervalle de 7 octaves correspond à peu près à l'intervalle de 12 quintes.

L'utilisation des quintes permet donc de trouver de "nouvelles" notes. Le cycle semble "boucler" (retomber sur la note initiale, ou plutôt sur une de ses octaves) au bout de 7 quintes, puis à nouveau au bout de 12 … mais finalement il ne boucle jamais exactement.

*Afin d'obtenir une gamme, il faut commencer par ramener les 12 notes créées **grâce au cycle des quintes** à l'intérieur d'une seule octave. Toutes les fréquences obtenues sortant de l'intervalle [f ; 2f] doivent alors être divisées par 2 pour descendre d'une octave. Cette opération s'appelle **la normalisation**.*

- Ouvrir le fichier « Gammes » dans Excel. La feuille de calcul Gamme de Pythagore apparaît.
  - Saisir la fréquence de la note initiale de la gamme à construire : ici, celle du Do[3].
  - A l'aide de la fonction « SI » du tableur, saisir en E4 la formule permettant de multiplier chaque fréquence précédente par l'intervalle correspondant à une quinte et diviser par 2 si le résultat est supérieur à l'octave (fréquence en B8). Copier la formule dans la colonne.
    Vérifier que toutes les fréquences appartiennent à [f_0 ; $2f_0$].
    Rappel : on fige l'adresse d'une cellule avec le symbole $ (touche F4 après la sélection de la cellule).

Appeler le professeur pour qu'il valide ou en cas de difficulté

- Observer les résultats des intervalles normalisés et le cycle des quintes obtenus.

1.1.3. Expliquer pourquoi la gamme de Pythagore ne « boucle » pas au bout de 12 quintes.

1.1.4. Calculer la valeur du comma de la gamme construite précédemment.

1.1.5. Que faut-il faire pour que le cycle de quintes reboucle ?

1.1.6. En déduire quelles sont les fréquences correspondant à la quinte du Loup.

1.1.7. Quel inconvénient présente cette gamme de notes ?

1.1.8. Exploiter les résultats du tableur pour redonner les fréquences calculées à partir des 12 premières quintes au Hz près et les associer aux notes de la gamme sur une octave.

note	do	do#	ré	ré#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si
f (Hz)	262											

1.2. Analyse mathématique du cycle

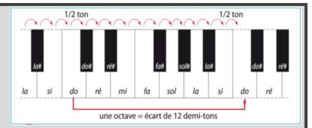
On veut montrer que le cycle des quintes est infini. Pour cela on suppose qu'il existe un nombre entier ***n*** de quintes et un nombre entier ***p*** d'octaves, non nuls, tels que la fréquence de la nème note calculée par le cycle des quintes soit égale à un multiple de la fréquence de la note de départ.

*1.2.1. Montrer que les nombres **n** et **p** vérifient $3^n = 2^{n+p}$.*

1.2.2. En utilisant un argument de parité, montrer que cette égalité n'est jamais possible.Conclure.

2. La gamme tempérée

Document 4 : le tempérament égal



Les gammes naturelles sont justes mais elles ont le désavantage de présenter la quinte du loup et posent des problèmes lors des transpositions* (nécessaires pour adapter la mélodie à la voix de l'interprète ou au registre de l'instrument) : les intervalles doivent être conservés ce qui posent des problèmes conséquents.

Au XVIIème siècle, l'utilisation des nombres irrationnels permet au modèle du tempérament égal de s'imposer : l'idée est de découper l'octave en douze intervalles égaux (les demi-tons $2^{1/12}$). Chacune des notes est donc un peu fausse (ce n'est pas une gamme naturelle) mais de peu, et la transposition ne pose plus de problème.

**La transposition d'un morceau consiste à décaler toutes ses notes d'un intervalle fixe vers le grave ou vers l'aigu.*

2.1. Rechercher la définition des nombres rationnels et irrationnels et justifier la nature rationnelle ou irrationnelle des intervalles dans la gamme de Pythagore et la gamme tempérée.

- Dans le fichier Gammes, passer à la feuille de calcul « Gamme tempérée ».
  - Saisir en E4 la formule permettant de multiplier chaque fréquence précédente par l'intervalle correspondant à un demi-ton.

Appeler le professeur pour qu'il valide ou en cas de difficulté

2.2. Que peut-on dire de la fréquence de la dernière note obtenue ? Commenter.

2.3. Exploiter les résultats du tableur pour redonner les fréquences calculées à partir des 12 premières quintes au Hz près et les associer aux notes de la gamme sur une octave.

note	do	do#	ré	ré#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si
f (Hz)	262											

2.4. Comparer la fréquence des notes entre celles de la gamme de Pythagore et celles de la gamme tempérée et la perception sonore qui peut en résulter.

2.5. Établir une relation entre la fréquence f_n d'une note de la gamme et la fréquence f_0 de la première note de cette gamme.

2.6. Pourquoi peut-on dire que la musique est l'art de faire entendre les nombres ?