

Minimisation des pertes en ligne



But : Comprendre comment on doit optimiser un réseau en minimisant les pertes en ligne.

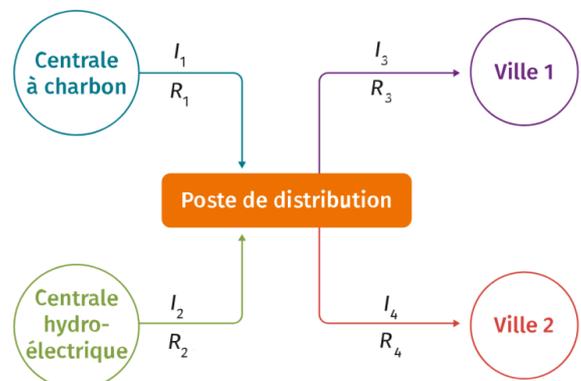
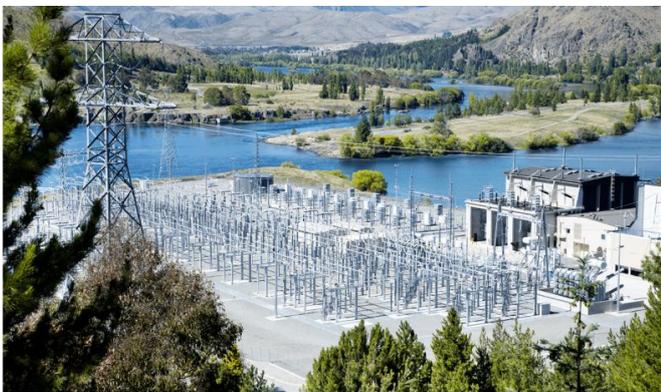
Compétences : APP – REA – VAL

La conception et la gestion du réseau de transport d'électricité est une des clés de la transition énergétique, notamment avec l'apport en électricité à partir de sources d'énergies renouvelables.

Un des objectifs majeur est la minimisation des pertes par effet Joule dans la distribution d'électricité au sein d'un réseau. Cet objectif entre dans le cadre général des problèmes mathématiques de transport et d'optimisation sous contraintes. Très difficiles à résoudre car non linéaires, ces problèmes nécessitent des traitements numériques lorsqu'ils mettent en jeu un nombre important d'inconnues ou de données. Associés à des algorithmes, les graphes orientés sont des modèles mathématiques utiles pour traiter ce type de problèmes qu'on retrouve dans des domaines variés : transport d'informations dans les réseaux informatiques, les réseaux sociaux, les transactions financières, les analyses génétiques, etc ...

On se contentera ici d'une situation simplifiée pour en comprendre le principe.

Une situation à étudier



Deux villes de moyenne montagne sont alimentées par une petite centrale à charbon de puissance maximale $P_{max1} = 16 \text{ MW}$ et une centrale hydroélectrique de puissance maximale $P_{max2} = 24 \text{ MW}$.

Avant d'arriver aux deux villes, l'électricité passe par un poste de distribution qui répartit le courant électrique en fonction des besoins. La ville 1 nécessite une puissance électrique moyenne $P_{C1} = 20,0 \text{ MW}$. La ville 2 a besoin d'une puissance électrique moyenne $P_{C2} = 10,0 \text{ MW}$

La tension au sein du réseau étudié est de $U = 20 \text{ kV}$.

La longueur des lignes reliant la centrale hydroélectrique au poste de distribution est deux fois plus grande que celle reliant la centrale à charbon à ce même poste de distribution. Celles reliant le poste de distribution aux villes sont 10 fois plus petites que celle reliant la centrale hydroélectrique au poste de distribution.

La valeur de la résistance des lignes reliant la centrale à charbon au poste de distribution sera, arbitrairement, prise comme valant $1,0 \Omega$

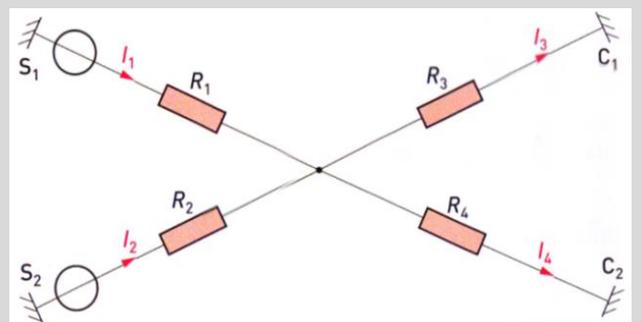
Rappel : la résistance d'une ligne est proportionnelle à sa longueur ($R = \rho \times \ell / S$)

Document 1 : Les contraintes d'un réseau électrique

On considère le réseau ci-contre :

Les contraintes subies par le réseau sont :

- L'intensité du courant électrique que peut fournir une source distributrice est liée à la puissance qu'elle peut fournir.
- La loi des nœuds permet de comprendre que l'intensité totale $I_1 + I_2$ des courants entrant dans un nœud est nécessairement égale à l'intensité totale des courants $I_3 + I_4$ qui en ressortent.
- L'intensité du courant électrique arrivant à une cible est imposée par la puissance électrique qui y est utilisée.



Document 2 : Minimisation des pertes

Afin de minimiser les pertes par effet Joule, il faut chercher à réduire la puissance dissipée par effet Joule. Cela ne peut être fait qu'en agissant sur les sources car la puissance et la tension nécessaire pour les cibles ne permettent pas d'ajuster l'intensité qui leur est délivrée.

Pour minimiser les pertes, il faut donc écrire la fonction exprimant la puissance en fonction de l'intensité et chercher la valeur pour laquelle cette fonction atteint son minimum.

Il existe plusieurs méthodes pour trouver ce minimum :

- **Méthode 1** : à partir de la courbe de la fonction, tracée à la calculatrice (voir ANNEXE)
- **Méthode 2** : avec un logiciel dédié à la géométrie et à l'algèbre comme GeoGebra (voir ANNEXE)
- **Méthode 3** : à partir de la dérivée de la fonction (spé maths)

1. Représentation du réseau

✍ 1.1. Représenter le réseau étudié sous la forme d'un graphe orienté (1).

✍ 1.2. Calculer la valeur de chaque résistance : R_1 , R_2 , R_3 et R_4 (2).

2. Intensités dans les lignes

Chaque ville consommant une puissance électrique moyenne connue, on détermine d'abord les intensités des courants qui les alimentent. On en déduit ensuite les intensités des courants devant être produits puis transportés depuis les centrales.

✍ 2.1. Calculer, pour la ville 1, l'intensité I_3 du courant arrivant à cette cible (3).

✍ 2.2. Même question pour la ville 2 et l'intensité I_4 .

✍ 2.3. En déduire la valeur de l'intensité du courant que doit délivrer l'ensemble des deux centrales (4).

✍ 2.4. Montrer que l'intensité I_2 du courant délivré par la centrale à charbon est liée à I_1 , celle du courant délivré par la centrale hydroélectrique, par la relation : $I_1 = 1,5 \times 10^3 - I_2$

3. Minimisation des pertes par effet Joule

L'ensemble des lignes permettant la distribution des courants produits puis consommés génèrent des pertes par effet Joule. L'ensemble de ces pertes s'ajoutent et permettent de déterminer la perte totale due au transport de ces courants. Une minimisation des pertes par effet Joule peut être obtenue grâce à une bonne gestion des courants fournis par les centrales.

✍ 3.1. Exprimer littéralement la puissance Joule totale P_J pour cette installation, en fonction des résistances R_1 , R_2 , R_3 et R_4 et des intensités I_1 , I_2 , I_3 et I_4 .

✍ 3.2. Remplacer les symboles par les valeurs connues et repérer dans l'expression obtenue, les paramètres sur lesquels un contrôle peut être réalisé de façon à minimiser les pertes.

✍ 3.3. Montrer alors que la fonction à minimiser est : $P_J = I_1^2 + 2 \times (1500 - I_1)^2 + 250000$ (5).

Tout le monde peut résoudre le problème avec les **méthodes 1 ou 2** du document 2 !

✍ 3.4. Avec la méthode de son choix, déterminer la valeur de l'intensité I_1 pour laquelle la fonction de la question P_J passe par un minimum (6).

✍ 3.5. Calculer alors la valeur de l'intensité I_2 correspondante (7).

✍ 3.6. Vérifier que les valeurs obtenues sont cohérentes avec les puissances électriques maximales des deux centrales.

✍ 3.7. Calculer la valeur de la puissance perdue par effet Joule dans le réseau, pour la minimisation obtenue.

4. Minimisation des pertes par effet Joule en spé maths

Quand on suit la spécialité de mathématiques, on peut résoudre le problème sans l'aide d'un logiciel ou du graphe donné par une calculatrice. On utilise la **méthode 3**.

✍ 4.1. Réduire la partie variable du polynôme obtenu en 3.3.

✍ 4.2. Donner l'expression de la dérivée de ce polynôme.

✍ 4.3. Retrouver l'intensité donnant le minimum de cette fonction.

(1) : La notion de graphe orienté est vue dans l'activité Modélisation.



(2) : Il faut bien lire les informations données dans la situation à étudier.



⁽³⁾ : il faut savoir comment on calcule une puissance électrique !



(4) : il faut lire le document 1 !



**⁽⁵⁾ : réduire cette expression suppose de se rappeler les identités remarquables.
Est-ce bien utile pour la suite ? Pas sûr, à moins de chercher à utiliser la méthode 3 !**



[Retour](#)

⁽⁶⁾ : pour faire apparaître l'expression d'une fonction plus « classique »,
on peut remplacer I_1 par x



⁽⁷⁾ : il faut se rappeler que I_1 et I_2 sont liées.

